漸化式導入

$\boxed{1}$ [312最新　数学Ｂ　例14]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測してみよう。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$a_1=1$$

$$a_2=1+2\cdot 1=1+2$$

$$a_3=1+2(1+2)=1+2+2^2$$

$$a_4=1+2(1+2+2^2)=1+2+2^2+2^3$$

以下，同じように考えて

$$a_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}$$

すなわち　　$a_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$　　と推測される。

$\boxed{2}$ [312最新　数学Ｂ　練習32]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ において $a_n+1=b_n$ とおくとき，$b_{n+1}=2b_n$ が成り立つことを示せ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$b_{n+1}=a_{n+1}+1=(2a_n+1)+1=2a_n+2$$

$$2b_n=2(a_n+1)=2a_n+2$$

よって　　$b_{n+1}=2b_n$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{3}$ [312最新 数学B 例題13]

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+4 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

漸化式を変形すると　$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

$a_n+2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

また　$b_1=a_1+2=2+2=4$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=4\cdot 3^{n-1}$

$a_n=b_n-2$ であるから　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2$

$\boxed{4}$ [312最新 数学B 練習33]

次の c の値を求めよ。

(1) $a_{n+1}=2a_n-5$ のとき　$a_{n+1}-c=2(a_n-c)$

(2) $a_{n+1}=4a_n+9$ のとき　$a_{n+1}-c=4(a_n-c)$

(1) $c=2c-5$ を解くと　$c=5$

(2) $c=4c+9$ を解くと　$c=-3$

漸化式解法②

5 [312最新 数学B 練習34]

次の条件によって定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3$，$a_{n+1}=5a_n-8$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3) $a_1=4$，$a_{n+1}=3a_n-2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=5(a_n-2)$

$a_n-2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=5b_n$

また　$b_1=a_1-2=3-2=1$

よって，数列$\{b_n\}$は初項1，公比5の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=1\cdot 5^{n-1}=5^{n-1}$

$a_n=b_n+2$ であるから　$a_n=5^{n-1}+2$

(2) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

$a_n+3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$

また　$b_1=a_1+3=2+3=5$

よって，数列$\{b_n\}$は初項5，公比2の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=5\cdot 2^{n-1}$

$a_n=b_n-3$ であるから　$a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$

(3) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

また　$b_1=a_1-1=4-1=3$

よって，数列$\{b_n\}$は初項3，公比3の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

$a_n=b_n+1$ であるから　$a_n=3^n+1$

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

数学的帰納法実践①

6 [312最新 数学B 例題14]

次の等式が成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ。

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$$

この等式を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき　　左辺$=1$，　右辺$=1^2=1$

よって，(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)=k^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$n=k+1$ のときの (A) の左辺を考えると，① により

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} &= k^2+\{2(k+1)-1\}\\ &= k^2+2k+1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

よって，(A) は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

数学的帰納法実践②

$\boxed{7}$ [312最新 数学B 練習35]

次の等式が成り立つことを，数学的帰納法で証明せよ。

$$2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$$

この等式を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき　左辺$=2$,　右辺$=1\cdot(1+1)=2$

よって，(A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$2+4+6+\cdots\cdots+2k=k(k+1) \quad \cdots\cdots ①$$

$n=k+1$ のときの (A) の左辺を考えると，① により

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots\cdots+2k+2(k+1)&=k(k+1)+2(k+1)\\&=(k+1)(k+2)\\&=(k+1)\{(k+1)+1\}\end{aligned}$$

よって，(A) は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　　)

数学的帰納法実践③－１

8 ［312最新　数学Ｂ　例題15］

n は自然数とする。このとき，4^n-1 は3の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

「4^n-1 は3の倍数である」を(A)とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$4^n-1=4^1-1=3$$

よって，$n=1$ のとき(A)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A)が成り立つと仮定すると，4^k-1 は3の倍数であるから，ある整数 m を用いて

$$4^k-1=3m$$

と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}4^{k+1}-1&=4(4^k-1)+3\\&=4\cdot3m+3\\&=3(4m+1)\end{aligned}$$

$4m+1$ は整数であるから，$4^{k+1}-1$ は3の倍数となり，$n=k+1$ のときにも(A)が成り立つ。

[1], [2]から，(A)はすべての自然数 n について成り立つ。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　　）

数学的帰納法実践③－２

9 [312最新　数学B　練習36]

n は自然数とする。このとき，5^n-1 は 4 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

「5^n-1 は 4 の倍数である」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$5^n-1=5^1-1=4$

よって，$n=1$ のとき (A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，5^k-1 は 4 の倍数であるから，ある整数 m を用いて　　$5^k-1=4m$　　と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$5^{k+1}-1=5(5^k-1)+4=5\cdot 4m+4$$
$$=4(5m+1)$$

$5m+1$ は整数であるから，$5^{k+1}-1$ は 4 の倍数となり，$n=k+1$ のときにも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　）

数学的帰納法実践③－３

10 [312最新　数学Ｂ　練習37]

n は自然数とする。このとき，n^3+2n は３の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

「n^3+2n は３の倍数である」を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$n^3+2n=1^3+2\cdot1=3$

よって，$n=1$ のとき (A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると，k^3+2k は３の倍数であるから，ある整数 m を用いて　$k^3+2k=3m$　と表される。

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1)&=k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\&=(k^3+2k)+3k^2+3k+3\\&=3m+3(k^2+k+1)\\&=3(m+k^2+k+1)\end{aligned}$$

$m+k^2+k+1$ は整数であるから，$(k+1)^3+2(k+1)$ は３の倍数となり，$n=k+1$ のときにも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　　　）

数学的帰納法実践④－１

$\boxed{11}$ [312最新　数学Ｂ　例題16]

n は自然数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2^n > n$$

不等式 $2^n > n$ を (A) とする。

[1]　$n=1$ のとき　　左辺$=2$,　右辺$=1$

よって，$n=1$ のとき (A) は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$2^k > k \quad \cdots\cdots ①$$

$n=k+1$ のとき，(A) の両辺の差を考えると，① により

$$\begin{aligned} 2^{k+1}-(k+1) &= 2\cdot 2^k-(k+1) \\ &> 2\cdot k-(k+1) \\ &= k-1 \end{aligned}$$

$k-1 \geqq 0$ であるから

$$2^{k+1}-(k+1) > 0$$

すなわち　$2^{k+1} > k+1$　が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) が成り立つ。

[1]，[2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

数学的帰納法実践④－２

$\boxed{12}$ [312最新 数学Ｂ 練習38]

n は自然数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$3^n > 2n$$

不等式 $3^n > 2n$ を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき　左辺$=3$,　右辺$=2$

よって，$n=1$ のとき (A) は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(A) が成り立つと仮定すると

$$3^k > 2k \quad \cdots\cdots ①$$

$n=k+1$ のとき，(A) の両辺の差を考えると，① により

$$\begin{aligned} 3^{k+1}-2(k+1) &= 3\cdot 3^k-2(k+1) \\ &> 3\cdot 2k-2(k+1) \\ &= 4k-2 \end{aligned}$$

$4k-2>0$ であるから

$$3^{k+1}-2(k+1)>0$$

すなわち　$3^{k+1}>2(k+1)$　が成り立つ。

よって，$n=k+1$ のときにも (A) が成り立つ。

[1], [2] から，(A) はすべての自然数 n について成り立つ。

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　)